文章编号:1000-2375(2016)03-0315-03

关于 Smarandache LCM 函数的 β 次混合均值

张利霞,赵西卿

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要: 利用初等及解析的方法,研究 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与最大素因子函数 $P(n)$ 之差的 β 次方的值分布问题,并给出一个有趣的渐进公式.

关键词: Smarandache LCM 函数; 最大素因子函数; 初等方法; 均值性质

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-2375.2016.04.010

On the β-th hybrid mean value of the Smarandache LCM function

ZHANG Lixia,ZHAO Xiqing

(School of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan'an 716000,China)

Abstract: The β-th value distribution problem of F. Smarandache LCM function $SL(n)$ and the biggest prime divisor function $P(n)$ is studied by using the elementary and analytic method,and give an interesting asymptotic formula.

Key words: Smarandache LCM function; the biggest prime divisor function; elementary methods; asymptotic formula

0 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 F. Smarandache LCM 函数定义为最小的正整数 k 使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,即 $SL(n)=\min\{k: k\in\mathbb{N}, n\mid[1,2,\cdots,k]\}$. 若 n 的标准分解为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$,则由 $SL(n)$ 的定义易得 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}\}$. $P(n)$ 定义为正整数的最大素因子.

近年来,许多学者对 $SL(n)$ 和 $P(n)$ 的性质进行了研究并获得了许多有意义的结果,例如在文献[1]中研究了均方差$(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2$ 的均值分布问题,证明了对给定的整数 $k\geqslant 2$,对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $C_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

在文献[2]中研究了复合函数 $SL(Z(n))$ 的均值,并得到一个较强的渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数,$Z(n)$ 为著名的伪 Smarandache 函数.

收稿日期:2016-02-28
基金项目:陕西省教育厅科研计划项目(2013JK0557)和延安大学研究生教育创新计划项目资助
作者简介:张利霞(1989-),女,硕士生;赵西卿,通信作者,副教授,E-mail: ydzhaoxiqing@126.com

在文献[3]中研究了函数$SL(n)$在2^p+1和2^p-1上的下界估计，给出了当$p\geqslant 17$时，有较强的估计

$$SL(2^p+1)\geqslant 10p+1;SL(2^p-1)\geqslant 10p+1.$$

在文献[4]中研究了$S(n)$和$P(n)$的均方差的均值分布，对于任意的实数$x\geqslant 3$，$\beta>1$有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

在文献[5]中研究了$S(n)$与$P(n)$之差的β次方的值分布问题，给出了当$x\geqslant 3$，$\beta>1$时的渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^\beta=\frac{2\zeta\left(\frac{\beta+1}{2}\right)x^{\frac{\beta+1}{2}}}{(\beta+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{\beta+1}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

在文献[6]中研究了$SL(n)$和$P(n)$的均方差的均值分布问题，给出了渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

受文献[5]的启发，应用与上述文献相同的方法，对文献[6]中结论进行了推广和延伸，主要研究Smarandache LCM函数$SL(n)$与最大素因子函数$P(n)$之差的β次方的值分布问题，给出了较强的渐进公式，具体结果如下.

定理1 设$k>1$是给定的正整数，则对任意的实数$x\geqslant 1$，当$\beta\geqslant 1$时，有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^\beta=\frac{2}{(2\beta+1)}\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\zeta(n)$为Riemann Zeta-函数，$c_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数.

1 定理的证明

将区间[1,x]中的所有正整数n分为以下4个子集合A,B,C,D. 集合A满足$P(n)>\sqrt{n}$，$n=m\cdot P(n)$且$m<P(n)$；集合B满足$n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，$n=m\cdot p_1\cdot P(n)$，其中$p_1$为素数；集合$C$满足$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，$n=m\cdot P^2(n)$，$m<n^{\frac{1}{3}}$；集合$D$满足$P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$.

首先，由集合A和B的定义易得$SL(n)=P(n)$，故

$$\sum_{n\in A}(SL(n)-P(n))^\beta=0,\quad\sum_{n\in B}(SL(n)-P(n))^\beta=0\tag{1}$$

然后，由集合C的定义得

$$\sum_{n\in C}(SL(n)-P(n))^\beta=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ m<p}}(SL(mp^2)-P(mp^2))^\beta=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p<\sqrt{\frac{x}{m}}}(p^2-p)^\beta,$$

由文献[7-8]中Abel恒等式及素数定理$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\sum\limits_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$($a_i$为可计算的常数)得

$$\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2\beta}=\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\beta}-\pi(m)m^{2\beta}-2\beta\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\pi(t)t^{2\beta-1}\mathrm{d}t=$$

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\beta}-2\beta\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\left(\frac{t^{2\beta}}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i t^{2\beta}}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^{2\beta}}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{m^{\frac{2\beta+1}{2}}(\ln x-\ln m)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)-\frac{4\beta x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{(2\beta+1)m^{\frac{2\beta+1}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{t^{2\beta}}{\ln^{k+1}t}\mathrm{d}t\right)=$$

$$\frac{2x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{(2\beta+1)m^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{m^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

而对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant 2\beta-1)$ 有

$$\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2\beta-k}\ll\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\beta-k}\ll\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\beta-k}\ll\frac{\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2\beta-k+1}{2}}}{\ln\frac{x}{m}}.$$

故可得

$$\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}(p^2-p)^{\beta}=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{2x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{(2\beta+1)m^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln x}+\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{m^{\frac{2\beta+1}{2}}\ln^i x}\right)+\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\right)=$$

$$\frac{2}{(2\beta+1)}\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^2 x}\right).\tag{2}$$

最后，由集合 D 的定义可设 $SL(n)=p^{\alpha}$. 若令 $\alpha=1$，则有 $SL(n)=p=P(n)$，即 $SL(n)-P(n)=0$. 若设 $\alpha\geqslant 2$，且由 $P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$ 得

$$\sum_{n\in D}(SL(n)-P(n))^{\beta}\ll\sum_{n\in D}(SL^{\beta}(n)+P^{\beta}(n))\ll\sum_{\substack{mp^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2,p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}p^{\alpha\beta}+\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{\beta}{2}}\ll$$

$$\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2,p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}p^{\alpha\beta}\sum_{m\leqslant\frac{x}{p^{\alpha}}}1+x^{\frac{\beta+3}{3}}\ll x\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2,p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}p^{\alpha\beta}+x^{\frac{\beta+3}{3}}\ll x^{\frac{\beta+3}{3}}\tag{3}$$

结合(1)～(3)式可得

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^{\beta}=\frac{2}{(2\beta+1)}\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

2　参考文献

[1] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：71-74.
[2] 刘华，吕松涛. 一个包含 F. Smarandache 函数的复合函数[J]. 江西科学，2009，27(3)：325-327.
[3] 张利霞，赵西卿，韩建勤. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 河南科学：2015，33(8)：1291-1293.
[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报：中文版：2006，49(5)：1009-1012.
[5] 刘卓，石鹏. 关于 Smarandache 函数的 β 次混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报，2012，25(3)：335-338.
[6] Chen Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna：2007，3(2)：15-18.
[7] 潘承洞，潘承彪. 素数定理初等的证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.
[8] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Spring-verlag，1976.

（责任编辑　赵燕）